**引文格式**:金鑫,郭金运,李振洪.垂线偏差测量方法现状与展望[J].武汉大学学报(信息科学版),2026,51(5):888-903.DOI:10.13203/j.whugis20240504

**Citation**:JIN Xin,GUO Jinyun,LI Zhenhong.Current Status and Prospects of Vertical Deflection Measurement Methods[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2026,51(5):888-903.DOI:10.13203/j.whugis20240504

# 垂线偏差测量方法现状与展望

金 鑫[1,2] 郭金运[2] 李振洪[3]

1 兰州交通大学测绘与地理信息学院,甘肃 兰州,730070

2 山东科技大学测绘与空间信息学院,山东 青岛,266590

3 长安大学地质工程与测绘学院,陕西 西安,710054

**摘 要**:垂线偏差是描述地球形态和重力场特征的核心参数,在大地测量、地球物理、地质灾害监测以及海洋科学等领域具有重要意义。系统梳理了当前垂线偏差测量的主要方法,包括天文大地测量法、全球导航卫星系统水准测量法、重力测量法、重力场球谐系数解算法和卫星测高法等,分析了各方法的优缺点及适用性。针对现有方法在复杂天气条件下的局限性,特别是全天候条件下的高精度测量需求,重点探讨了全天候垂线偏差测量方法的发展潜力。结合仪器设备的进步和数据处理技术的发展,展望了垂线偏差测量未来的发展趋势,指出天文大地测量设备的小型化与商业化、全天候垂线偏差测量方法的应用以及海洋垂线偏差实测方法的突破将是未来研究的重点方向。通过设备创新、技术融合和多领域应用拓展,垂线偏差测量技术将在服务地球科学研究与实际工程需求中发挥更大的作用。

**关键词**:垂线偏差;测量方法;天文大地测量;全天候测量;海洋垂线偏差

**中图分类号**:P223 **文献标识码**:A **收稿日期**:2025-03-25

**DOI**:10.13203/j.whugis20240504 **文章编号**:1671-8860(2026)05-0888-16

# Current Status and Prospects of Vertical Deflection Measurement Methods

*JIN Xin*[1,2] *GUO Jinyun*[2] *LI Zhenhong*[3]

1 Faculty of Geomatics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

2 College of Geodesy and Geomatics, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China

3 College of Geological Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054, China

**Abstract**: Vertical deflection is a core parameter for describing the Earth's shape and gravity field characteristics, holding significant importance in geodesy, geophysics, geological hazard monitoring, and marine sciences. A systematic review of the main methods for measuring vertical deflection is presented, including astronomical geodetic methods, global navigation satellite system (GNSS) leveling gravimetric methods, spherical harmonic solutions of the gravity field, and satellite altimetry inversion. The advantages, disadvantages, and applicability of each method are analyzed. Among these, direct measurement methods, such as astronomical geodesy, integrated GNSS with charge coupled device (CCD) technology, and GNSS measurements, can achieve high-precision vertical deflection measurements due to their real-time data acquisition capabilities, but they are limited by environmental conditions and equipment performance. On the other hand, indirect measurement methods, such as gravimetric methods, spherical harmonic solutions of the gravity field, and satellite altimetry, use existing data for calculations, offering higher computational efficiency, but their accuracy depends on high-precision, high-resolution gravity field models or the quality of input data. In general, astronomical geodetic methods (integrated GNSS with total stations for vertical deflection measurements, and integrated GNSS with CCD for vertical deflection measurements) are the pri-

**基金项目**:国家自然科学基金(42274006,42430101);甘肃省青年科技基金(25JRRA199);国家资助博士后研究人员计划(GZC20231019);兰州交通大学天佑博士后科学基金(TYBSH_KJ_202406)。

**第一作者**:金鑫,博士,副教授,研究方向为垂线偏差测量。xinjin@lzjtu.edu.cn

**通信作者**:郭金运,博士,教授。guojy@sdust.edu.cn

mary approaches for directly measuring high-precision vertical deflections and are suitable for high-precision requirements in static environments. GNSS leveling gravimetric methods have been widely applied in ground measurements and regional mapping, but their application is challenging in complex terrain conditions. Spherical harmonic solutions of the gravity field and satellite altimetry methods, with their broad coverage advantages, play a key role in marine vertical deflection measurement and global gravity field research. However, each method has certain limitations, and the need for all-weather, high-precision, automated vertical deflection measurements remains a pressing challenge. Due to the limitations of existing methods under complex weather conditions and the increasing demand for all-weather, high-precision measurements, the development potential of all-weather vertical deflection measurement methods is emphasized. A novel all-weather vertical deflection measurement method integrating GNSS with three-dimensional laser tracking technology is introduced. Advances in instrumentation and data processing technologies indicate future development trends in vertical deflection measurement, including the miniaturization and commercialization of astronomical geodetic equipment, the application of all-weather measurement methods, and breakthroughs in marine vertical deflection techniques. Through advances in equipment innovation, technological integration, and cross-disciplinary applications, vertical deflection measurement technology is expected to play an increasingly important role in supporting Earth science research and engineering applications.

**Key words**: vertical deflection; measurement methods; astronomical geodesy; all-weather measurement; marine vertical deflection

垂线偏差是铅垂线与参考椭球面法线之间的夹角,表示大地水准面相对于参考椭球面的倾斜程度,表征了地球内部质量分布的时空不均匀性[1-2]。垂线偏差给出了重力矢量的方向,是大地测量的基本观测量[3-4],含有丰富的重力场高频信息,可用于推求平均地球椭球的大小、形状,精化大地水准面模型[5-6],归算天文大地测量数据[7-8],也可用于空间技术和精密工程测量[9-10]。通过垂线偏差的时变研究验证了其变化与地震之间有着十分密切的关系,为地震的监测提供了新的手段[11-12]。垂线偏差能够提供丰富的地球重力场和大地水准面精细结构信息,在解决大地测量应用、地球物理反演、资源勘探、地震和火山监测、卫星发射和精密定轨以及辅助导航等领域有着非常重要的意义[13-17]。

垂线偏差的测量方法主要包括天文大地测量法、全球导航卫星系统(global navigation satellite system,GNSS)水准测量法、重力测量法、重力场球谐系数解算法和卫星测高法等。天文大地测量法是垂线偏差经典的测量方法,主要利用高精度天文经纬仪或者数字天顶相机系统[18-20]对恒星进行观测,实现高精度垂线偏差测量。GNSS水准测量法是基于GNSS观测数据和精密水准测量数据,在几何观测原理的基础之上,利用最小二乘法通过高程异常与垂线偏差之间的约束关系来求解垂线偏差。重力测量法通常是利用重力异常等数据,基于重力数据和垂线偏差之间的关系来解算垂线偏差。重力场球谐系数解算法是根据事先解算好的地球重力场模型,利用模型的重力位系数计算垂线偏差。卫星测高法主要是根据测高点在测高记录时刻的位置和时间信息,利用海面高观测量计算沿轨大地水准面梯度,进而解算垂线偏差模型。

这些主要的垂线偏差确定方法按照测量方式和数据处理模式,可以分为间接测量法(静态数据估算法)和直接测量法(动态数据测量法)。相对于直接测量法,间接测量法较为简单,只需要通过已获得数据建立其与垂线偏差之间的关系,便可通过已知数据解算垂线偏差。而直接测量法受外界环境的影响较大,所以对数据的实时处理以及测量仪器精度等方面有较高的要求。重力测量法、重力场球谐系数解算法、卫星测高法等方法都属于间接测量法。传统的天文大地测量法、集成GNSS和电荷耦合器件(charge coupled device,CCD)技术、GNSS水准测量属于直接测量法。

## 1　垂线偏差直接测量法进展

### 1.1　天文大地测量法

天文大地测量法是最常用的高精度垂线偏差测量方法,在同一测站进行天文观测和大地测量,得到该站的天文坐标($\varphi,\lambda$)和大地坐标($B,L$)。天文坐标以铅垂线为基础,大地坐标以参考椭球面法线为基础,垂线偏差($\xi,\eta$)计算

如下[19]:

$$\begin{cases}\xi=\varphi-B\\ \eta=(\lambda-L)\cos\varphi\end{cases} \tag{1}$$

由于该测量方法涉及天文测量,因此天文观测技术成为垂线偏差测量发展的重要推动力。早期的天文大地测量主要是用天文经纬仪观测较明亮的恒星[21],最典型的观测仪器是瑞士威特公司生产的WILD T4经纬仪[22],如图1所示。它可以采用东西星等高法测定天文经度,南北星中天高差法测定天文纬度,精度可达0.3″。



图1 WILD T4经纬仪[22]

Fig. 1 WILD T4 Theodolite[22]

然而,传统的天文大地测量存在诸多局限。在传统天文大地测量中都是人工寻找待测恒星,耗时较长,相邻两颗待测恒星观测时间间隔应大于3 min[23]。此外,在观测过程中,时常会出现星位分布很好,但因时间相距较近而要舍去一颗恒星的情况,需等待较近位置的下一颗恒星,导致整体测量效率下降。不仅如此,传统的测量仪器过于庞大笨重,不易携带,且设备操作复杂,观测的准备和程序多而杂,同时对观测操作技术要求高,需要测量人员进行专业的技术培训,尤其是收时、读表的操作,全程需要人眼寻星和观测目标,计算工作量大,数据记录和解算完全需要人工完成。尽管WILD T4经纬仪设计精密,测量精度高,但因为其测量效率低下,在20世纪已停产。中国一直使用WILD T4经纬仪进行天文大地测量至21世纪初,现已停止使用[24]。在现代天文大地测量中,WILD T4经纬仪逐渐被其他仪器取代。

20世纪70年代以来,摄影测量技术的进步给天文大地测量技术带来了很大的机遇。摄影天顶筒通过精确拍摄天顶附近恒星,匹配星表确定测站点的天文坐标,进而计算垂线偏差,使得天文大地测量方法进入半自动化甚至全自动化阶段,测量效率和精度也相对提高。但是,单一测站数据处理通常需要3~5 h,不仅需要较多的人力和物力,效率较低,还需要较高的投入[25]。比较有代表性的仪器是瑞士纳沙泰尔天文台的Grubb & Parsons照相天顶筒[26],见图2。

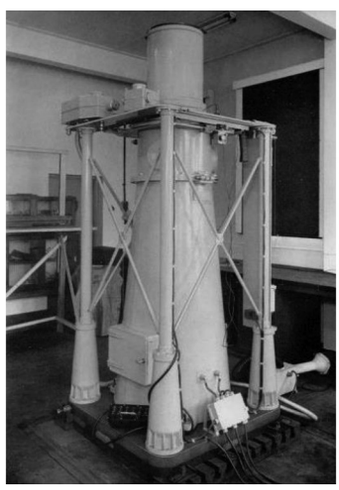


图2 Grubb & Parsons照相天顶筒[26]

Fig. 2 Grubb & Parsons Photographic Zenith Tube[26]

#### 1.1.1 基于电子经纬仪/全站仪的垂线偏差测量法

20世纪90年代初,随着电子经纬仪/全站仪和计算机技术的发展,以及全球定位系统(global positioning system,GPS)技术的成功应用,垂线偏差的测量达到半自动化观测阶段,瑞士、德国、希腊等国家都研制了全站仪天文定位系统[27]。具有代表性的是瑞士苏黎世联邦理工学院研制的ICARUS系统,它利用计算机控制普通全站仪,沿用经典的东西星等高法测定天文经度、南北星中天高差法测定天文纬度,定位精度达到0.5″。

与国外研究相比,中国相关单位也取得了丰硕的成果。如信息工程大学研制出了基于全站仪和卫星天文计时器的Y/JGT-01天文测量系统[23],如图3所示,天文定位精度可达到0.3″,符合中国一等天文测量精度要求;火箭军工程大学也研制了类似的ASCA-1型系统,其精度也能够满足中国一等天文测量要求,已在国防和军事领域中得到了较好应用。

综上分析,基于经纬仪/全站仪的观测系统可以自动寻星和自动处理观测数据,观测技术和数据处理方法逐步完善,测量效率和精度相对提升。但对恒星的观测仍然依赖于人眼,观测员需经过长期培训,肉眼照准存在固有偏差(人仪差),会导致系统误差,且需定期在天文已知点进行校正。测量时对天气依赖强,当云雾遮挡部分等高带时,会导致某些方位恒星无法观测,进一步限制了设备的使用。



图 3　Y/JGT-01天文测量系统[23]

Fig. 3　Y/JGT-01 Astronomical Survey System[23]

### 1.1.2　基于CCD技术的垂线偏差测量法

21世纪初,CCD技术、GPS、计算机技术的发展和成熟为天文大地测量带来了革命性的进展。高分辨率、小型化的CCD替代了传统的照相底片,高精度的GPS卫星授时替代了传统的无线电授时,计算机的程序化控制减少了人为因素的干扰,实现了数字天顶仪的自动观测及数据的自动处理,观测效率和测量精度有了显著提高。德国、瑞士等国家相继研制出数字天顶仪,目前比较著名的有瑞士苏黎世联邦理工学院研制的DIADEM系统[28](图4)和德国汉诺威大学研制的TZK2-D系统[18](图5)。通过20~30 min的观测,垂线偏差测量精度达到0.08″[2,28]。DIADEM系统和TZK2-D系统在德国的相同站点进行了长时间比对测量,差异小于0.1″,一定程度上说明数字天顶仪具有较好的外符合精度。两个数字天顶仪的成功研制为垂线偏差流动测量提供了仪器基础,逐渐得到许多国家的重视,推动了CCD地面光学测地仪器的研制与应用。



图 4　DIADEM系统[28]

Fig. 4　DIADEM System[28]

奥地利维也纳技术大学也研制了小型CCD数字天顶仪ZCG1[29]。ZCG1在欧洲和美洲的许多发达国家被用于局部和区域大地水准面确定以及其他地球物理学研究,但造价昂贵。波兰克拉科夫AGH科技大学研制了PZL-100数字天顶仪[30],日本和土耳其也研制了自己的数字天顶仪[31-32]。

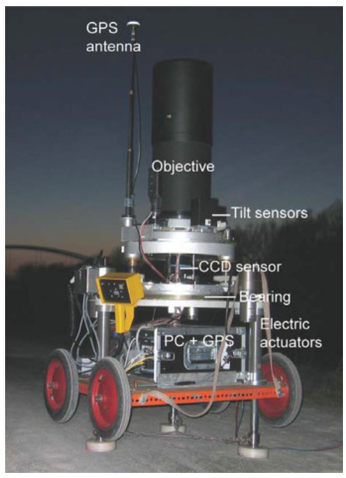



图 5　TZK2-D系统[18]

Fig. 5　TZK2-D System[18]

与国外研究相比,中国垂线偏差测量系统的研究起步相对较晚,在样机设计、研发以及数据处理方法上充分吸收了国外的成功经验,同时做了许多改进。2011年中国科学院国家天文台和山东科技大学联合研制了中国第一台数字天顶仪DZT-1[33],如图6所示。理论分析以及实际观测结果均表明,天文经纬度测量精度达到了中国一等天文测量要求[19,33-35]。西安航光仪器厂与火箭军工程大学联合研制了数字天顶仪[36],并成功应用于2020年珠穆朗玛峰高程测量任务。

近年来,为了推动数字天顶仪的普及应用,研究热点逐步向小型化方向发展。苏黎世联邦理工学院对DIADEM进行了升级,开发出CODIAC,并制造了两台CODIAC系统,分别命名为“Blue”和“Red”,保持了与DIADEM相同的测量效率和测量精度[37-38]。随后,拉脱维亚大学也开发了VESTA系统。CODIAC的测量精度优于0.05″,而VESTA的精度约为0.1″[39-40]。这两种系统是过去十年中使用最广泛的系统,在众多测量调查活动中证明了其有效性。CODIAC在美国大地水准面坡度验证测量(geoid slope validation survey,GSVS)2014年的项目中观测了204个站点的垂线偏差[41],又在GSVS 2017年的项目中观测了223个站点的垂线偏差,以验证中等山地和高山地区大地水准面精度[42]。

对于图像全站仪系统,瑞士苏黎世联邦理工学院基于全站仪开发了QDeadalus系统[43],如图7

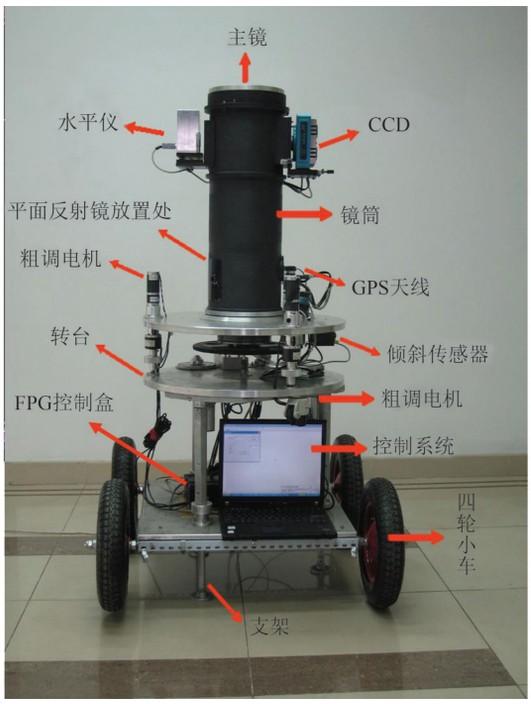



图6 DZT-1系统[33]

Fig. 6 DZT-1 System[33]

所示,利用CCD相机以非破坏性的方式替代现有全站仪的目镜,实现了恒星的自动成像观测[43]。美国国家地理测量局于2020年开发了全站仪天文大地测量控制系统TSACS,通过天文大地测量方式验证大地水准面模型[44]。中国的信息工程大学依托徕卡TS60图像全站仪,提出了一种利用图像全站仪实现高精度、全自动垂线偏差测量的方法,通过在河南郑州和陕西泾阳的野外实验,测得垂线偏差精度为0.18″~0.23″,说明图像全站仪在保证高精度的同时,具备了较高的测量效率和单人操作的优势[45]。

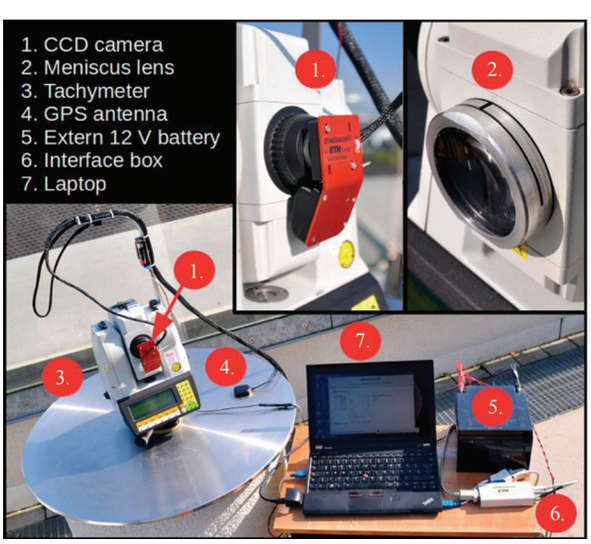



图7 QDeadalus系统[43]

Fig. 7 QDaedalus System[43]

总的来说,这些仪器在测量原理上具有相似性,包括从参考星表中选择天顶区域的恒星,精确计算恒星的视位置,并通过参考星进行星像识别。数字天顶相机和图像全站仪系统都集成了CCD,实现了恒星的自动观测与成像,并据此解算天文坐标。然而,要完成高水平的天文点测量,测量系统都需要在晴朗夜晚观测星等较低的恒星,对天气条件要求较高,无法实现全天候观测。尽管经过小型化设计,测量仪器仍然体积庞大,重量至少为50 kg,通常需借助车辆运输,在山区、海岛等交通不便地区的应用受到限制。

### 1.2 GNSS水准测量法

GNSS水准测量法是获取垂线偏差的一种直接测量方法,它综合GNSS和水准测量数据,利用最小二乘法通过大地水准面起伏与垂线偏差之间的约束关系来求解垂线偏差,同时必须进行GNSS测量和水准测量,以获得大地水准面起伏之间的差异[1, 46]。

大地高和正高的关系为:

$$H=h+N \tag{2}$$

式中,$H$为大地高;$h$为正高;$N$为大地水准面高。将大地高转换成GNSS水准基线为:

$$\Delta H=\Delta h+\Delta N \tag{3}$$

式中,$\Delta H$为基线两端点的大地高差,通过GNSS差分定位获取;$\Delta h$为正高高差,通过精密水准测量获取;$\Delta N$为基线两端点之间的大地水准面高差。

当基线两端距离较近时,垂线偏差可近似表示为:

$$-\frac{\Delta N}{\Delta S}\approx\xi\cos\alpha_{AB}+\eta\sin\alpha_{AB} \tag{4}$$

式中,$\Delta S$为基线$A$、$B$之间的距离;$\alpha_{AB}$为基线$A$、$B$的方位角;$\xi$和$\eta$分别为垂线偏差的子午分量和卯酉分量。则垂线偏差$\mu$为:

$$\mu=\xi\cos\alpha_{AB}+\eta\sin\alpha_{AB} \tag{5}$$

由式(3)~(5)可得$\mu=(\Delta h-\Delta H)/\Delta S$,根据误差传播定律可得:

$$m_\mu^2=\frac{1}{\Delta S^2}\left(m_{\Delta h}^2+m_{\Delta H}^2\right)+\left(\frac{\Delta h-\Delta H}{\Delta S}\right)^2 m_{\Delta S}^2 \tag{6}$$

式中,$m_\mu$为$\mu$的中误差;$m_{\Delta h}$和$m_{\Delta H}$分别为$\Delta h$和$\Delta H$的中误差;$m_{\Delta S}$为$\Delta S$的中误差。

考虑到由GNSS测得的水平距离误差对垂线偏差的影响很小,$m_{\Delta S}$可忽略,则有:

$$m_\mu^2=\frac{1}{\Delta S^2}\left(m_{\Delta h}^2+m_{\Delta H}^2\right) \tag{7}$$

由此可以看出,当GNSS和水准测量精度一

定时,$m_\mu$仅与水平距离有关。

若存在两条GNSS基线边,则有:

$$\begin{cases}\delta_1=\xi\cos\alpha_1+\eta\sin\alpha_1\\ \delta_2=\xi\cos\alpha_2+\eta\sin\alpha_2\end{cases}\tag{8}$$

式中,$\delta_1$和$\delta_2$分别为沿两条GNSS基线边的垂线偏差;$\alpha_1$和$\alpha_2$分别为两条GNSS基线边的方位角。解方程组(8)即可得:

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{\delta_1\sin\alpha_2-\delta_2\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}\\ \eta=\dfrac{\delta_1\cos\alpha_2-\delta_2\cos\alpha_1}{\cos(\alpha_1-\alpha_2)}\end{cases}\tag{9}$$

从式(9)可以看出,$\xi$、$\eta$的计算精度在很大程度上受基线之间夹角的影响。因此,在使用GNSS水准法测量垂线偏差时,应当将两条基线的夹角控制在90°,若有地形限制,也应将基线夹角控制在60°以上,以保证垂线偏差的计算精度[47]。

20世纪末,国内外学者相继开展了GNSS水准测量垂线偏差的相关探索。SOLER等[13]证明结合GNSS定位与精密水准测量,可在不依赖传统天文观测的情况下获得较为精确的垂线偏差。VANDENBERG等[48]提出了通过天顶角差分和正高观测计算垂线偏差的两种模型,并利用大地水准面起伏分析参考椭球面的斜率。TSE等[1]以中国香港为研究区域,通过GNSS观测和精密水准测量验证了垂线偏差计算的可靠性,其结果与EGM96模型高度一致。在中国,相关研究得到进一步细化和应用。王爱生[46]基于方向导数与梯度理论推导垂线偏差计算公式,并利用实测数据建立区域模型。欧海平等[49]分析了影响垂线偏差精度的关键因素,指出当GNSS基线高差精度达到2 mm时,垂线偏差精度可达2″。许曦等[50]提出天文水准GNSS方法,解决了不同高程系统之间的连接难题。徐益群等[51]系统分析了GNSS水准测量法的误差源,并提出优化观测设计的准则。这些研究为GNSS水准法在高精度垂线偏差测量中的应用提供了坚实的理论与技术基础。此外,ALBAYRAK等[52]利用GNSS水准测量法,在瑞士东阿尔卑斯山区进行了精确的大地水准面确定,结果表明GNSS水准数据能实现厘米级的精度,验证了采用该方法在复杂山区地形中进行大地水准面建模的可靠性。

总体来说,GNSS水准测量法的精度还有待提高,繁琐的操作和静态测量使得该方法的测量效率不高。另外,精密水准测量需要提供能见度条件,使得这种方法难以在复杂的地形条件下使用。

## 2　垂线偏差间接测量法进展

### 2.1　重力测量法

根据已有重力数据来推算垂线偏差也是一种有效的垂线偏差计算方法。1928年,Vening-Meinesz利用区域重力异常数据推算出球面积分表达式来计算垂线偏差,该公式被称为Vening-Meinesz公式,是重力异常与垂线偏差转化的基本公式[53]。该公式假设大地水准面之外没有扰动物质且全球重力异常数据已知,就可按Stokes方法求得大地水准面上的垂线偏差。Vening-Meinesz公式为:

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{1}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\sigma}\Delta g\dfrac{\mathrm{d}S(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\cos\alpha\mathrm{d}\sigma\\ \eta=\dfrac{1}{4\pi\gamma}\iint\limits_{\sigma}\Delta g\dfrac{\mathrm{d}S(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\sin\alpha\mathrm{d}\sigma\end{cases}\tag{10}$$

式中,$\gamma$为地球平均正常重力;$\Delta g$为大地水准面上点的重力异常;$\psi$为计算点到流动点的球面距离;$\alpha$为计算点到流动点的方位角;$\sigma$为积分域;$\dfrac{\mathrm{d}S(\psi)}{\mathrm{d}\psi}$为Vening-Meinesz函数,其表达式为:

$$\frac{\mathrm{d}S(\psi)}{\mathrm{d}\psi}=\frac{\cos\frac{\psi}{2}}{2\sin^2\frac{\psi}{2}}+8\sin\psi-6\cos\frac{\psi}{2}-\frac{3\left(1-\sin\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\psi}+3\sin\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right)\tag{11}$$

Vening-Meinesz公式应用的理论前提之一是获取高质量的全球重力异常数据,但受限于测量技术及复杂的测量环境,缺乏足够的重力异常数据,因此Vening-Meinesz公式常与移去-恢复技术组合后应用。中国在进行天文大地网与高精度GPS2000网联合平差时,为满足地面观测数据归算到WGS84椭球的需要,采用Vening-Meinesz公式、移去-恢复技术和高阶次地球重力场模型完成了中国陆地垂线偏差的精化计算,通过检验得到中国垂线偏差子午分量总体精度为±1.45″,卯酉分量总体精度为±1.50″[3]。

为了保持在高精度的条件下提高垂线偏差的计算效率,国内外许多学者对该公式进行了改进。其中,频谱分析方法的迅速发展和广泛应用是该领域中最重大的进展,SCHWARZ等[54]在总结谱分析技术在物理大地测量中的应用时,给出

了垂线偏差的二维平面快速傅里叶变换算式。宁津生等[55]和LIU等[56]相继推导出了利用二维和一维快速傅里叶变换算法实现垂线偏差快速计算的球面公式。随着计算方法的不断优化以及计算机技术的快速发展,基于重力异常数据的垂线偏差计算问题得到了较好的解决[56-57]。

高精度、均匀分布的全球重力异常数据的获取仍然是这一领域面临的主要挑战。近年来,卫星、海洋和航空重力测量技术的发展极大地提升了重力异常测量的效率和精度。然而,卫星重力测量在分辨率和精度方面仍然存在一定限制。此外,计算区域边缘缺乏足够的数据会导致边缘区域的计算误差增大。为此,在实际应用中,通常需要扩大测量范围,以获取更多的重力数据用于计算Vening-Meinesz积分,从而减少边缘效应对结果精度的影响。

### 2.2 基于地球重力场模型的垂线偏差计算法

地球重力场模型是描述地球重力场最有效的手段。地球重力场模型实际上是地球引力位按球谐函数展开位系数的集合,它将复杂的地球重力场用球谐函数的形式解析表达,能十分方便、快速地表示和计算大地水准面、重力异常、垂线偏差、扰动重力和高程异常等任意扰动场元。随着各种地球重力场模型的建立,基于地球重力场模型的垂线偏差计算法逐渐被广泛应用。

根据球谐系数计算垂线偏差子午分量(南北分量)和卯酉分量(东西分量)的过程也被称为球谐综合。首先,由重力场理论可知垂线偏差和扰动位的关系为:

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{1}{\gamma R}\dfrac{\partial T}{\partial\theta}\\ \eta=-\dfrac{1}{\gamma R\sin\theta}\dfrac{\partial T}{\partial\lambda}\end{cases}\tag{12}$$

式中,$\theta$为大地余纬;$\lambda$为大地经度;$R$为地球半径;$T$是扰动位,为引力位和正常引力位之差。$T$常写成如下形式:

$$T=\frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\left[\bar{C}^*_{nm}\cos(m\lambda)+\bar{S}^*_{nm}\sin(m\lambda)\right]\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\tag{13}$$

式中,$GM$为地球引力常数;$r$为地心距离;$\bar{C}^*_{nm}$和$\bar{S}^*_{nm}$为扰动位的完全规格化球谐系数,是引力位球谐系数和正常引力位球谐系数之差;$n$和$m$分别为球谐函数的阶与次;$\bar{P}_{nm}$为完全规格化缔合勒让德函数。因此,垂线偏差分量的球谐函数计算公式为:

$$\begin{cases}\xi(r,\theta,\lambda)=\dfrac{R}{r}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\left[\bar{C}^*_{nm}\cos(m\lambda)+\bar{S}^*_{nm}\sin(m\lambda)\right]\frac{\mathrm{d}\bar{P}_{nm}(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\\ \eta(r,\theta,\lambda)=\dfrac{R}{r\sin\theta}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}m\left[\bar{C}^*_{nm}\sin(m\lambda)-\bar{S}^*_{nm}\cos(m\lambda)\right]\bar{P}_{nm}(\cos\theta)\end{cases}\tag{14}$$

近年来,基于地球重力场模型计算垂线偏差的研究不断推进,并在精度评估和应用领域取得了一定成果。齐显峰等[58]利用EGM2008重力场模型计算了不同阶次条件下的垂线偏差,并对中国东部和西部地区进行了精度分析。研究表明,720阶次以下模型精度提升显著,720阶次以上变化趋于平缓,但西部地形复杂、数据匮乏区域的计算精度相对较低[58]。张永毅和张兴福[59]通过EGM2008(2 190阶次)模型计算垂线偏差分量,并与美国GSVS 2011年实测数据进行对比分析,发现计算分量的均方根约为0.1″~0.3″。WAN等[60]利用EGM2008和EIGEN-6C4模型计算垂线偏差分量,用以验证HY-2A卫星测高数据反演结果,计算的子午分量和卯酉分量的标准差分别为1.1″和3.5″。JI等[61]采用XGM2019e模型进行计算,用于评估测高数据确定的垂线偏差分量,子午分量和卯酉分量均方根差异约为0.3″。

随着大地测量观测技术的不断进步,地球重力场模型的精度和分辨率将进一步提高,为获取更高精度的垂线偏差数据提供了可能。这些研究为垂线偏差的精确解算和实际应用奠定了坚实基础。

此外,在利用地球重力场球谐系数计算垂线偏差的过程中,如何快速且准确地递推高阶缔合勒让德函数是另一个关键问题。尤其在计算高阶次的勒让德函数时,数值可能会溢出,进而影响计算的精度和稳定性。目前常用的递推方法有两种:(1)HOLMES和FEATHERSTONE[62]改进了传统的递推计算方法,通过构建勒让德函数的值避免了溢出问题,可以稳定计算任意纬度下的2 700阶次勒让德函数;(2)FUKUSHIMA[63]提出了扩充数域法,通过扩展数域范围,引入两个双精度浮点数,使得在递推过程中避免数值溢出。此外,其他学者也开展了相关研究。JEKELI等[64]提出了一种快速稳定的超高阶勒让

德函数计算策略,通过忽略冗余项,减少了计算误差,并节省了计算内存。苏勇等[65]推导了一种缔合勒让德函数二阶导数的快速稳定递推算法,其数值测试表明,即使在高达 3 600 阶次的情况下,该方法的计算效率相较于当时其他方法仍提升了一倍以上,且无奇异性,可适用于任意纬度的快速精确计算。刘缵武等[66]进一步研究发现,在计算超高阶(大于 3 600 阶)勒让德函数时,即使采用压缩因子递推算法,两极附近仍可能因溢出而导致计算失败。通过改进压缩因子修正递推算法,成功推导出可达到 5 400 阶次的高精度压缩勒让德函数。张飞[67]系统研究了 4 种缔合勒让德函数递推算法,包括标准向前行递推法、标准向前列递推法、跨阶次递推法和 Belikov 递推法,从计算精度和速度两个方面进行了比较,发现当阶数超高时,标准向前列和标准向前行递推法速度最快但精度最差,跨阶次递推法速度稍快于 Belikov 方法,两者精度相当。尽管通过插入比例因子等手段能改善递推过程中的不稳定性,但往往会增加计算量,从而牺牲速度。SVEHLA[68]提出了一种基于几何旋转的新方法,通过旋转矩阵高效计算超高阶勒让德函数,避免了数值误差积累,拓展了可接受的纬度范围。XING 等[69]提出了完全归一化的列式递推公式,用于计算缔合勒让德函数及其一阶导数,成功实现了最高 64 800 阶次的稳定计算,并显著提高了计算精度与效率。

综合分析表明,改进的递推算法,特别是扩展数域法和压缩因子递推法,在超高阶缔合勒让德函数的计算中展现了明显的优势。这些方法有效避免了数值溢出问题,显著提高了计算稳定性和精度。相关研究为提升缔合勒让德函数计算效率和精度提供了重要的技术支持,推动了超高阶重力场模型在大地测量中的进一步应用。

### 2.3　基于卫星测高的海洋垂线偏差计算法

随着卫星测高技术的发展,基于测高数据构建海洋垂线偏差的方法也逐渐成熟,目前主要包括 Sandwell 法、沿轨最小二乘法和最小二乘配置法等,这些方法主要适用于海洋区域。

#### 2.3.1　Sandwell 法

Sandwell 法是利用卫星测高数据中的位置和时间信息计算垂线偏差的方法[70]。在卫星地面轨迹交叉点处分别求升轨和降轨上大地水准面高关于时间的一阶导数以及卫星在经纬度方向上的速率,从而求得交叉点处垂线偏差的两个方向分量,即:

$$\begin{cases}\dot{N}_a=\dfrac{\partial N_a}{\partial t}=\dfrac{\partial N_a}{\partial \varphi}\dot{\varphi}_a+\dfrac{\partial N_a}{\partial \lambda}\dot{\lambda}_a\\ \dot{N}_d=\dfrac{\partial N_d}{\partial t}=\dfrac{\partial N_d}{\partial \varphi}\dot{\varphi}_d+\dfrac{\partial N_d}{\partial \lambda}\dot{\lambda}_d\end{cases}\tag{15}$$

式中,$a$ 和 $d$ 分别为上升弧和下降弧;$\dot{\varphi}$ 和 $\dot{\lambda}$ 分别为卫星沿地面轨迹在纬度和经度方向上的速率;$\dot{N}$ 是 $N$ 关于时间的一阶导数。当卫星轨道近似圆轨时,则卫星速率满足以下近似关系:

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_a\approx-\dot{\varphi}_d\\ \dot{\lambda}_a\approx\dot{\lambda}_d\end{cases}\tag{16}$$

联合式(15)、(16),可得到 $N$ 关于纬度和经度的导数为:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N}{\partial \varphi}=\dfrac{1}{2|\dot{\varphi}|}(\dot{N}_a-\dot{N}_d)\\ \dfrac{\partial N}{\partial \lambda}=\dfrac{1}{2\dot{\lambda}}(\dot{N}_a+\dot{N}_d)\end{cases}\tag{17}$$

式中,$\dot{\varphi}$、$\dot{\lambda}$、$\dot{N}_a$ 和 $\dot{N}_d$ 可由卫星测高数据中的时间、位置和大地水准面高信息获得,从而可以确定垂线偏差的 $\xi$ 和 $\eta$ 分别为:

$$\begin{cases}\xi=-\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial N}{\partial \varphi}\\ \eta=-\dfrac{1}{R\cos\varphi}\dfrac{\partial N}{\partial \lambda}\end{cases}\tag{18}$$

利用 Sandwell 法解算垂线偏差时,仅能计算交叉点处的垂线偏差方向分量,存在沿轨海面高数据使用率低的问题。

#### 2.3.2　沿轨最小二乘法

OLGIATI 等[71]提出在利用交叉点处信息的基础上,利用沿轨大地水准面高的一次差分解算垂线偏差。为了提高垂线偏差的空间分辨率,按一次差分计算每条弧段逐个观测点的沿轨垂线偏差,并利用交叉点处两个沿轨方向的垂线偏差推算该点在垂直于轨迹方向的垂线偏差,进而联合构建整个区域的海洋垂线偏差模型。该方法所获得的垂线偏差分量空间分辨率较高,但是该方法在各个观测点处垂直于轨迹方向的垂线偏差需要由相邻交叉点处的值内插获得,影响了垂线偏差的计算精度。

沿轨垂线偏差实际上是沿轨大地水准面梯度的负数。通过剔除海面高观测值中的动态海面地形可得到沿轨 $N$,然后根据沿轨相邻两点 $N$ 的差值及两点之间的球面距离 $\Psi$,计算得到沿轨大地水准面梯度 $e$:

$$e=\frac{\partial N}{\partial \Psi}\tag{19}$$

取交叉点附近一个较小区域,可将其视为平

面,则计算交叉点处的垂线偏差的$\xi$和$\eta$为:

$$\begin{cases}\xi=-\dfrac{\partial N}{\partial x}\\ \eta=-\dfrac{\partial N}{\partial y}\end{cases} \tag{20}$$

式中,$x$和$y$分别为北向坐标和东向坐标。

同时,顾及地面轨迹的方位角$A$,则可用垂线偏差表示沿轨大地水准面梯度为:

$$\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\cos A_1 & \sin A_1\\ \cos A_2 & \sin A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix} \tag{21}$$

式中,下标1和2分别表示两条相交的不同轨迹。因此,只要交叉的两轨迹线不重合,就有:

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}=-\frac{1}{\sin(A_2-A_1)}\begin{bmatrix}\sin A_2 & -\sin A_1\\ -\cos A_2 & \cos A_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\end{bmatrix} \tag{22}$$

利用该方法计算垂线偏差时,只需存在交叉点即可,不要求交叉的两弧段分别为上升弧和下降弧。但是这种方法仅利用了交叉点处的大地水准面梯度信息。为了充分利用沿轨大地水准面梯度信息,基于以上给定的垂线偏差分量与沿轨大地水准面梯度之间的关系,沿轨加权最小二乘法能够直接确定格网点处的垂线偏差方向分量平均值。沿轨大地水准面梯度可由选定格网区域内中心点处的垂线偏差计算:

$$-e_i=\xi\cos A_i+\eta\sin A_i \tag{23}$$

式中,$i=1,2,\cdots,n$,$n$为选定的格网区域内沿轨迹海面高观测点的数量;$A_i$和$e_i$分别为第$i$个观测点的方位角和沿轨大地水准面的梯度。误差方程为:

$$-v_i=\xi\cos A_i+\eta\sin A_i+e_i \tag{24}$$

式中,$v_i$为第$i$个观测值的残差。假设观测值相互独立,利用最小二乘原理(权$P_i$的选取可采用反距离定权确定),可求解垂线偏差的$\xi$和$\eta$。

考虑到利用交叉点信息解算海洋垂线偏差模型的应用限制,HWANG等[72]提出利用沿轨海面高数据采用最小二乘原理直接解算海洋垂线偏差模型的方法。该方法不仅理论严密,而且不需要计算测高卫星地面轨迹的交叉点,计算过程简便,在海洋垂线偏差的构建中得到广泛应用。

2.3.3 最小二乘配置法

最小二乘配置法也是一种常用的解算格网垂线偏差的方法,并且能够融合多源观测数据。通常根据数据噪声和信号之间的统计性质,在确定已知量与待求量之间的协方差函数后,根据观测值信号求取待求信号。最小二乘配置法解算规则格网内的$\xi$和$\eta$的公式为:

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{\xi\varepsilon}\\ \boldsymbol{C}_{\eta\varepsilon}\end{bmatrix}\left[\boldsymbol{C}_{\varepsilon\varepsilon}+\boldsymbol{C}_{nn}\right]^{-1}\boldsymbol{e} \tag{25}$$

式中,$\boldsymbol{C}_{\xi\varepsilon}$为$\xi$和沿轨大地水准面梯度的协方差阵;$\boldsymbol{C}_{\eta\varepsilon}$为$\eta$和沿轨垂线偏差的协方差阵;$\boldsymbol{C}_{\varepsilon\varepsilon}$为沿轨垂线偏差的方差阵;$\boldsymbol{C}_{nn}$为沿轨垂线偏差噪声方差阵;$\varepsilon$为沿轨大地水准面梯度;$\boldsymbol{e}$表示为沿轨海面高梯度。

垂线偏差子午分量和卯酉分量的方差函数不是各向同性的,而垂线偏差径向分量$l$和横向分量$m$的方差函数是各向同性的。因此,便于理论研究,$\boldsymbol{C}_{\xi\varepsilon}$、$\boldsymbol{C}_{\eta\varepsilon}$和$\boldsymbol{C}_{\varepsilon\varepsilon}$可以由垂线偏差$l$和$m$的方差确定。

星下点$p$处垂线偏差的$\xi$和$\eta$为:

$$\begin{cases}\xi_p=-l_p\cos\alpha_{pq}+m_p\sin\alpha_{pq}\\ \eta_p=-l_p\sin\alpha_{pq}-m_p\cos\alpha_{pq}\end{cases} \tag{26}$$

式中,$\alpha_{pq}$表示从星下点$p$到星下点$q$的方位角。

在$p$和$q$两点处的沿轨垂线偏差用$l$和$m$表示为:

$$\begin{cases}\varepsilon_p=l_p\cos(\alpha_{\varepsilon_p}-\alpha_{pq})+m_p\sin(\alpha_{\varepsilon_p}-\alpha_{pq})\\ \varepsilon_q=l_q\cos(\alpha_{\varepsilon_q}-\alpha_{pq})+m_q\sin(\alpha_{\varepsilon_q}-\alpha_{pq})\end{cases} \tag{27}$$

式中,$\alpha_{\varepsilon_p}$和$\alpha_{\varepsilon_q}$分别为$p$和$q$沿轨垂线偏差的方位角。

格网垂线偏差子午分量和卯酉分量与沿轨垂线偏差的协方差($\boldsymbol{C}_{\xi\varepsilon}$,$\boldsymbol{C}_{\eta\varepsilon}$),以及沿轨垂线偏差的方差为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{C}_{\xi\varepsilon}=\boldsymbol{C}_{ll}\cos\alpha_{pq}\cos(\alpha_{\varepsilon_q}-\alpha_{qp})-\boldsymbol{C}_{mm}\sin\alpha_{pq}\sin(\alpha_{\varepsilon_q}-\alpha_{qp})\\ \boldsymbol{C}_{\eta\varepsilon}=\boldsymbol{C}_{ll}\cos\alpha_{pq}\cos(\alpha_{\varepsilon_q}-\alpha_{qp})+\boldsymbol{C}_{mm}\sin\alpha_{pq}\sin(\alpha_{\varepsilon_q}-\alpha_{qp})\\ \boldsymbol{C}_{\varepsilon\varepsilon}=\boldsymbol{C}_{ll}\cos(\alpha_{\varepsilon_p}-\alpha_{qp})\cos(\alpha_{\varepsilon_q}-\alpha_{qp})+\boldsymbol{C}_{mm}\sin(\alpha_{\varepsilon_p}-\alpha_{qp})\sin(\alpha_{\varepsilon_q}-\alpha_{qp})\end{cases} \tag{28}$$

式中,$\alpha_{qp}$为从$q$到$p$的方位角;$\boldsymbol{C}_{ll}$和$\boldsymbol{C}_{mm}$分别为垂线偏差$l$和$m$的方差,其计算公式为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{C}_{ll}=\dfrac{tD_tK(\psi_{pq})-\sin^2\psi_{pq}D_t^2K(\psi_{pq})}{\gamma_0^2rr'}\\ \boldsymbol{C}_{mm}=\dfrac{D_tK(\psi_{pq})}{\gamma_0^2rr'}\end{cases} \tag{29}$$

式中,$t=\cos\psi_{pq}$;$D$为尺度因子;$\gamma_0$为正常重力;$rr'$为两点的地心距离乘积;$K(\psi_{pq})$为$p$、$q$两点扰动位的协方差,其计算公式为:

$$K(\psi_{pq})=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n\left(\frac{R_B^2}{rr'}\right)^{n+1}P_n(\cos\psi_{pq}) \tag{30}$$

式中,$\sigma_n$为扰动位的阶方差;$R_B$为Bjerhammar椭球半径;$P_n$为$n$阶勒让德多项式。

21世纪以来,中国在基于卫星测高数据解算垂线偏差方面取得了多项具有代表性的研究成果。李建成等[73]通过多颗卫星的升降弧沿轨数

据的一次差分,获得交叉点处的垂线偏差,并内插解算出格网大小为2.5′×2.5′的垂线偏差。王虎彪等[74]联合多源卫星测高数据,采用沿轨迹加权最小二乘法,解算了中国近海海域格网大小5′×5′的垂线偏差。邓凯亮等[75]结合TOPEX/Poseidon、ERS-1/168、ERS-2、GFO和GEOSAT/GM数据,通过自交叉点处升降弧的沿轨大地水准面梯度及方位角信息,求得交叉点处垂线偏差子午分量和卯酉分量,并利用双线性内插法计算了格网大小为2′×2′的垂线偏差,模型精度与国际模型精度一致。万剑华等[76]利用TOPEX/Poseidon系列、Envisat系列和GEOSAT系列测高数据,采用HWANG等提出的垂线偏差解算方法,解决了法方程病态问题,得到中国近海2′×2′格网的垂线偏差模型,其结果与EGM2008模型相比,子午分量和卯酉分量的均方根误差均优于1″。张胜军等[77]联合两种轨道倾角的高度计数据,通过数据预处理,分别采用Sandwell法和加权最小二乘法计算了3个不同纬度区域的垂线偏差分量,研究表明解算精度与卫星轨道倾角密切相关。WAN等[60]利用HY-2A卫星测高数据反演全球海域垂线偏差分量,结果显示垂线偏差子午分量的精度优于卯酉分量。这些研究成果表明,通过联合多源卫星测高数据并采用改进的算法,可以显著提高垂线偏差解算精度。PENG等[78]提出了一种优化的垂线偏差组合方法,通过结合沿轨垂线偏差和跨轨垂线偏差,有效缩小了主经度分量和主垂线分量之间的精度差异,提高了海洋重力异常模型反演的精度。于道成等[79]研究发现SWOT在解算垂线偏差时表现出显著优势,能够将垂线偏差分量精度提升至0.7 μrad,远超传统测高卫星如Jason-2和Cryo-Sat-2的表现。

## 3　全天候垂线偏差测量

目前,垂线偏差的常用测定方法主要有天文大地测量法、重力测量法、天文重力测量法和GNSS水准测量法等,但这些传统的垂线偏差测量方法存在测量难度大、耗时长等问题,易受观测环境条件限制,无法进行全天候的外业观测,严重限制了垂线偏差的数据采集和应用,所以全天候、高精度的垂线偏差测量仍然是世界上亟待解决的难题[2,14,43]。三维激光跟踪技术是一种测量速度快、精度高的极坐标测量技术。JIN等[80]和郭金运等[81]提出一种集成GNSS和三维激光跟踪技术的全天候垂线偏差测量新方法,实现了垂线偏差的全天候、高精度测量,测量系统如图8所示,系统由基座、测量筒、激光跟踪仪、GNSS天线、自由落体靶球、电子水平仪、高度调节马达、时间采集器以及自动控制系统、移动设施和电源系统等组成,数据处理技术路线如图9所示。

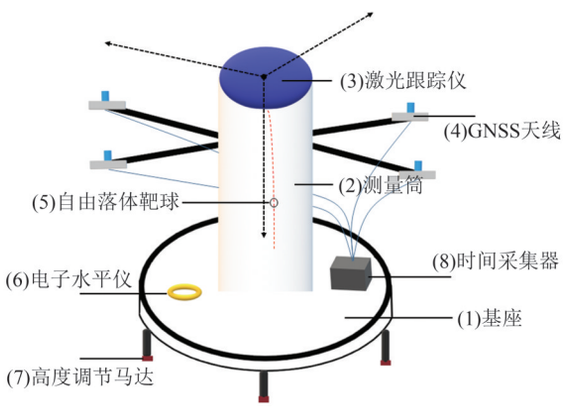



图8　垂线偏差测量示意图

Fig. 8　Diagram of Vertical Deflection Measurement

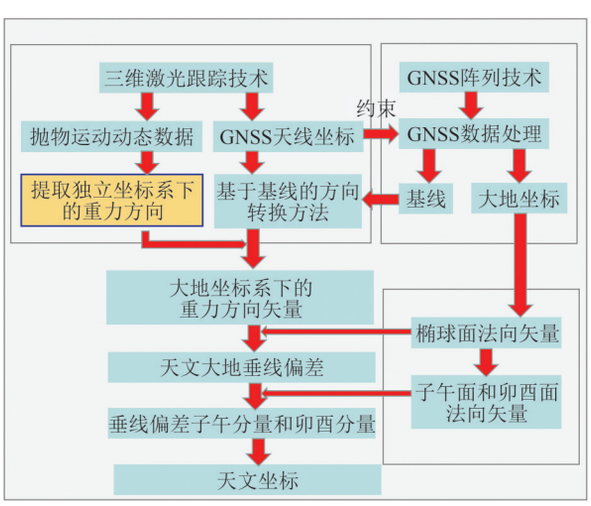



图9　全天候垂线偏差测量技术路线

Fig. 9　All-Weather Vertical Deflection Measurement Technical Route

全天候测量系统数据采集与处理涉及两种坐标系:(1)以激光跟踪仪镜头为基准建立的空间直角坐标系,称为激光跟踪仪坐标系;(2)基于GNSS测量的空间大地直角坐标系。实验步骤如下:

1)事先利用激光跟踪仪测量得到激光跟踪仪坐标系下的GNSS天线中心坐标,天线中心坐标互相作差得激光跟踪仪坐标系下微米甚至亚微米级的观测基线信息,为后续的重力方向矢量转换奠定基础。

2)利用激光跟踪仪和时间采集器动态跟踪测量抛物运动下落靶球的三维坐标时间序列,构

建抛物运动观测方程,利用最小二乘迭代法提取激光跟踪仪坐标系下的重力方向矢量。

3)基于高精度的基线距离约束,解算GNSS阵列数据,获得高精度的测点$P$大地坐标及GNSS基线向量。

4)结合步骤1)中所获得的激光跟踪仪坐标系下的基线信息和步骤3)中利用GNSS获得的空间大地直角坐标系下的公共基线信息,求得激光跟踪仪坐标系与空间大地直角坐标系之间的方向转换参数,进而将重力方向矢量转换到空间大地直角坐标系下。

5)根据测点$P$大地坐标确定的椭球面法向矢量,计算得到天文大地垂线偏差及其子午分量和卯酉分量。

全天候垂线偏差测量时主要误差源有激光跟踪测量误差、GNSS定位误差和独立坐标系与大地坐标系之间的坐标转换误差等。根据各个误差源的实际精度,进行垂线偏差时变测量仿真实验,将求得含有误差的垂线偏差时变特征与理论垂线偏差时变特征进行比较,以验证理论精度。设激光跟踪仪的点位精度为10 μm,跟踪测量频率为2 000 Hz,抛物运动下落距离为1 m左右。事先利用激光跟踪仪对固定的GNSS天线中心进行1 000次测量,确定其在独立坐标系下的坐标,当作已知值。设GNSS装置的定位精度为1 mm,共有4个GNSS天线,均匀分布在以激光跟踪仪为中心、半径为3 m的圆上。测点$P$的参考坐标为:$X$=−2 148 744.465 6 m,$Y$= 4 426 641.184 9 m,$Z$=4 044 656.051 6 m,选择WGS84椭球,椭球长半轴$a$=6 378 137 m,扁率$f$=1/298.257 223 563。

通过全天候垂线偏差测量的仿真实验结果如图10和表1所示,精度在±0.7″之间波动,且平均值趋近于0,标准差和均方根均优于0.2″,满足中国一等天文测量规范精度要求(0.3″)。垂线偏差$\xi$和$\eta$的精度在±0.3″内的占比分别可达85.9%和91.8%,表明全天候垂线偏差测量具有较好的稳定性。

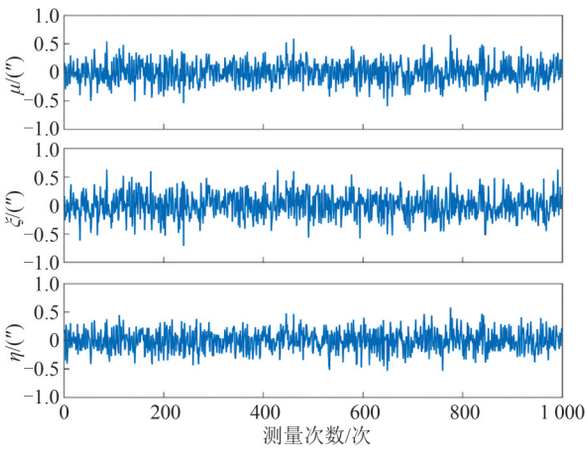



图10 垂线偏差精度分布

Fig. 10 Distribution of Vertical Deflection Accuracy

**表1 垂线偏差精度统计/(″)**

Table 1 Accuracy Statistics of Vertical Deflection/(″)

| 统计项 | 最大值 | 最小值 | 平均值 | 标准差 | 均方根 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu$ | 0.65 | −0.59 | 0.00 | 0.18 | 0.18 |
| $\xi$ | 0.62 | −0.70 | 0.00 | 0.20 | 0.20 |
| $\eta$ | 0.57 | −0.53 | 0.00 | 0.17 | 0.17 |

**表2 主要垂线偏差方法比较**

Table 2 Comparison of Major Vertical Deflection Measurement Methods

| 方法 | 优点 | 缺点 |
|---|---|---|
| 天文大地测量法 | 高精度 | 测量效率低,静态测量,依赖于天气情况 |
| GNSS水准测量法 | 精度一般 | 地面测量,效率较低,需要通视条件 |
| 重力测量法 | 间接测量,可利用现有数据,不增加仪器 | 存在边缘效应误差,对重力异常的高频误差较为敏感 |
| 重力场球谐系数解算法 | 间接计算 | 需要事先建立高精度重力场模型 |
| 卫星测高法 | 高效率,空间分辨率较高 | 适用于海洋区域,需要对垂线偏差数进行格网化等处理,对垂线偏差精度有一定的影响 |

## 4 结语与展望

### 4.1 结语

垂线偏差的测量方法多样且各具优势,涵盖了直接测量与间接测量两大类,如表2所示。直接测量方法凭借实时数据采集的特点,能够实现高精度的垂线偏差测量,但受限于环境条件和设备性能。而间接测量方法则利用已有数据进行解算,计算效率较高,但其精度依赖于高精度、高分辨率的重力场模型或输入数据的质量。

总体来看,天文大地测量法仍是直接测量高精度垂线偏差的主要方式,适用于静态环境下的高精度需求。GNSS水准测量法则在地面测量和区域测绘中得到了广泛应用,但在复杂地形条件下难以使用。重力场球谐系数解算法和卫星测高法凭借其广域覆盖的优势,在海洋垂线偏差测量和全球重力场研究中具有重要地位。然而,各种方法均存在一定的局限性,全天候、高精度、自

动化的垂线偏差测量是当前亟待解决的难题,这也限制了垂线偏差的广泛获取和应用。

### 4.2　展望

综合近年来的研究成果,未来垂线偏差测量的发展趋势可归纳为以下几个方面:

1)天文大地测量设备轻便化、智能化与商业化

随着仪器技术的持续进步,未来天文大地测量设备的轻便化、智能化与商业化将成为趋势。这一趋势不仅有助于降低仪器的成本,还提升便携性和操作便捷性。相比传统天顶仪,图像全站仪具备廉价化和平民化的潜力,基于图像全站仪的高精度测量系统有望进一步普及,成为地质监测、基础设施测量以及科学实验等领域的基础工具,推动垂线偏差测量技术广泛应用。商业化推广和普及化将促进这些设备在科研、灾害预警和资源勘探中的高效应用。

2)测量技术向动态、全天候测量方向发展

垂线偏差测量技术逐步从传统静态观测方法转向动态、全天候测量。如何实现全天候、高精度的垂线偏差测量仍然是未来研究的重要方向。在复杂地形和极端天气、气候条件下,结合GNSS阵列与三维激光跟踪技术的动态测量方案为全天候测量提供了新的解决思路。未来将进一步优化这些技术方案,结合高精度的气象数据、实时数据处理算法及移动平台,提升垂线偏差测量的精度、稳定性和时效性。这一突破对于地质灾害监测、精密工程测量、智能城市建设和基础设施维护等领域具有极大的潜力和实际应用价值。

3)海洋垂线偏差测量

在海洋领域,垂线偏差的测量面临着更多复杂的挑战,尤其是在精度和空间分辨率方面。尽管卫星测高技术提供了大范围的数据,但精度仍然无法满足高精度应用的需求。未来,结合船载的天文大地测量、动态定位和重力测量技术,探索新型海洋垂线偏差实测方法,将成为海洋重力研究的一个重要方向。这些技术结合现代重力和卫星观测数据,能够为海洋科学、资源开发、全球变化研究、海平面变化监测等提供更加精确的支持,尤其是在海洋资源开发与国家海洋权益管理等关键领域。

## 参　考　文　献


[1] TSE C M, IZ H B. Deflection of the Vertical Components from GPS and Precise Leveling Measurements in Hong Kong [J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2006, 132(3): 97-100.

[2] HIRT C, BÜRKI B, SOMIESKI A, et al. Modern Determination of Vertical Deflections Using Digital Zenith Cameras[J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2010, 136(1): 1-12.

[3] 宁津生, 郭春喜, 王斌, 等. 我国陆地垂线偏差精化计算[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2006, 31(12): 1035-1038.
NING Jinsheng, GUO Chunxi, WANG Bin, et al. Refined Determination of Vertical Deflection in China Mainland Area[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2006, 31(12): 1035-1038.

[4] 金鑫. 基于三维激光跟踪技术的垂线偏差全天候测量方法研究[D]. 青岛: 山东科技大学, 2023.
JIN Xin. Research on All-Weather Measurement Method of Vertical Deviation Based on Three-Dimensional Laser Tracking Technology[D]. Qingdao: Shandong University of Science and Technology, 2023.

[5] KÜHTREIBER N. Combining Gravity Anomalies and Deflections of the Vertical for a Precise Austrian Geoid[J]. *Bollettino di Geofisica Teorica Ed Applicata*, 1999, 40:3-4.

[6] HIRT C, FLURY J. Astronomical-Topographic Levelling Using High-Precision Astrogeodetic Vertical Deflections and Digital Terrain Model Data[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(4): 231-248.

[7] BÁNYAI L. Three-Dimensional Adjustment of Integrated Geodetic Observables in Earth-Centred and Earth-Fixed Coordinate System[J]. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 2013, 48(2): 163-177.

[8] FEATHERSTONE W E, MCCUBBINE J C, CLAESSENS S J, et al. Using AUS Geoid2020 and Its Error Grids in Surveying Computations[J]. *Journal of Spatial Science*, 2019, 64(3): 363-380.

[9] MIRGHASEMPOUR M, JAFARI A Y. The Role of Astro-Geodetic in Precise Guidance of Long Tunnels[J]. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 2015, 40: 453-457.

[10] 李敏, 李琼, 苏勇. 采用高精度地球重力场模型计算垂线偏差及隧道贯通误差[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2024, 49(10): 1922-1930.
LI Min, LI Qiong, SU Yong. Calculation of Vertical Deviation and Tunnel Through Error Based on High-Precision Earth Gravity Field[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, 49(10): 1922-1930.

[11] HAN Y B, MA L H, HU H, et al. Application of Astronomic Time-Latitude Residuals in Earthquake Prediction[J]. *Earth, Moon, and Planets*, 2007,

100(1): 125-135.

[12] HAN S C, SAUBER J, LUTHCKE S. Regional Gravity Decrease After the 2010 Maule (Chile) Earthquake Indicates Large-Scale Mass Redistribution[J]. *Geophysical Research Letters*, 2010, 37(23): L23307.

[13] SOLER T, HAN J Y, WESTON N D. On Deflection of the Vertical Components and Their Transformations[J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2014, 140(2): 04014005.

[14] VITTUARI L, TINI M A, SARTI P, et al. A Comparative Study of the Applied Methods for Estimating Deflection of the Vertical in Terrestrial Geodetic Measurements[J]. *Sensors*, 2016, 16(4): 565.

[15] HIRT C, WILDERMANN E. Reactivation of the Venezuelan Vertical Deflection Data Set from Classical Astrogeodetic Observations[J]. *Journal of South American Earth Sciences*, 2018, 85: 97-107.

[16] 刘新, 回桂华, 周爱民, 等. 基于多波束激光测高卫星ICESat-2观测的垂线偏差解算[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2023, 42(5): 1-11.
LIU Xin, HUI Guihua, ZHOU Aimin, et al. Deflections of the Vertical Determination Based on Multi-Beam Laser Altimetry Satellite ICESat-2 Data[J]. *Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science)*, 2023, 42(5): 1-11.

[17] ZHOU S, LIU X, SUN Y, et al. Predicting Bathymetry Using Multisource Differential Marine Geodetic Data with Multilayer Perceptron Neural Network[J]. *International Journal of Digital Earth*, 2024, 17(1).

[18] HIRT C, SEEBER G. Accuracy Analysis of Vertical Deflection Data Observed with the Hannover Digital Zenith Camera System TZK2-D[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(6): 347-356.

[19] 郭金运, 宋来勇, 常晓涛, 等. 数字天顶摄影仪确定垂线偏差及其精度分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2011, 36(9): 1085-1088.
GUO Jinyun, SONG Laiyong, CHANG Xiaotao, et al. Vertical Deflection Measure with Digital Zenith Camera and Accuracy Analysis[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2011, 36(9): 1085-1088.

[20] 时春霖, 张超, 袁晓波, 等. 天文大地测量的发展现状和展望[J]. 测绘工程, 2019, 28(2): 33-40.
SHI Chunlin, ZHANG Chao, YUAN Xiaobo, et al. The Present Situation and Prospect of Astronomical Geodetic Measurement[J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 2019, 28(2): 33-40.

[21] 夏坚白, 宋成骅, 吴家让. 全能经纬仪T4的检验与应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2007.
XIA Jianbai, SONG Chenghua, WU Jiarang. Inspection and Application of All-Round Theodolite T4[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2007.

[22] 王若璞. 新型大地天文测量系统工程化研究[D]. 郑州:信息工程大学, 2004.
WANG Ruopu. Engineering Development of a Novel Astronomical Geodetic Measurement System[D]. Zhengzhou: Information Engineering University, 2004.

[23] 张超. 基于电子经纬仪的天文测量系统及应用研究[D]. 郑州: 信息工程大学, 2009.
ZHANG Chao. Research on Astronomical Measurement System Based on Electronic Theodolite and Its Application[D]. Zhengzhou: Information Engineering University, 2009.

[24] 董朝阳, 唐宇培, 刘新江. 天文经度测量中人仪差测定精度评估方法研究[J]. 海洋测绘, 2015, 35(5): 47-50.
DONG Zhaoyang, TANG Yupei, LIU Xinjiang. Precision Evaluating Methods of Personal and Instrumental Equation Correction in Astronomical Longitude Surveys[J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2015, 35(5): 47-50.

[25] HIRT C. Monitoring and Analysis of Anomalous Refraction Using a Digital Zenith Camera System[J]. *Astronomy & Astrophysics*, 2006, 459(1): 283-290. .

[26] MCCARTHY D D. Some Advantages and Disadvantages of a Photographic Zenith Tube[J]. *Symposium-International Astronomical Union*, 1979, 82: 65-66.

[27] BALODIMOS D D, KORAKITIS R, LAMBROU E, et al. Fast and Accurate Determination of Astronomical Coordinates $\Phi$, $\Lambda$ and Azimuth, Using a Total Station and GPS Receiver[J]. *Survey Review*, 2003, 37(290): 269-275.

[28] HIRT C, SEEBER G. High-Resolution Local Gravity Field Determination at the Sub-Millimeter Level Using a Digital Zenith Camera System[M]. Heidelberg: Springer, 2008.

[29] GERSTBACH G, PICHLER H. A Small CCD Zenith Camera (ZC-G1)-Developed for Rapid Geoid Monitoring in Difficult Projects[C]//The 8th National Conference of Yugoslav Astronomers, Belgrade, 2003.

[30] KUDRYS J. Automatic Determination of Vertical Deflection Components from GPS and Zenithal Star Observations[J]. *Acta Geodynamica et Geomaterialia*, 2007, 4(4): 169.

[31] HANADA H, ARAKI H, TAZAWA S, et al. Development of a Digital Zenith Telescope for Ad-

vanced Astrometry[J]. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2012, 55(4): 723-732.

[32] HALICIOGLU K, DENIZ R, OZENER H. Digital Astro-Geodetic Camera System for the Measurement of the Deflections of the Vertical: Tests and Results[J]. *International Journal of Digital Earth*, 2016, 9(9): 914-923.

[33] 王红旗, 韩延本, 郭金运, 等. 用于测量铅垂线变化的小型天体测量仪器[C]//中国地球物理学会第二十七届年会,中国,长沙, 2011.
WANG Hongqi, HAN Yanben, GUO Jinyun, et al. Small Astronomic Instruments for Measuring Variation of the Vertical [C]//The 27th Annual Meeting of the Chinese Geophysical Society, Changsha, China, 2011.

[34] TIAN L L, GUO J Y, HAN Y B, et al. Digital Zenith Telescope Prototype of China[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2014, 59(17): 1978-1983.

[35] YUAN J J, GUO J Y, SHEN Y, et al. Automatic Observation of Astronomical Coordinates Using the Shandong University of Science and Technology/National Astronomical Observatories Digital Zenith Tube [J]. *Journal of Testing and Evaluation*, 2022, 50(6): 2838-2849.

[36] 艾贵斌, 龚建, 张华伟, 等. 数字天顶摄影定位原理与方法[M]. 北京:解放军出版社, 2014.
AI Guibin, GONG Jian, ZHANG Huawei, et al. Principles and Methods of Digital Zenith Photography Positioning [M]. Beijing: Liberation Army Press, 2014.

[37] GUILLAUME S, BÜRKI B. Astrogeodetic Deflection of the Vertical at ETH Zürich: From the Development of Instrumentations to Concrete Applications [C]// American Geophysical Union Fall Meeting, San Francisco, 2014.

[38] ALBAYRAK M, WILLI D, GUILLAUME S. Field Comparison of the Total Station-Based QDaedalus and the Zenith Telescope-Based CODIAC Astrogeodetic Systems for Measurements of the Deflection of the Vertical[J]. *Survey Review*, 2023, 55(390): 247-259.

[39] ZARIŅŠ A, RUBANS A, SILABRIEDIS G. Digital Zenith Camera of the University of Latvia [J]. *Geodesy and Cartography*, 2016, 42(4): 129-135.

[40] VARNA I, WILLI D, GUILLAUME S, et al. Comparative Measurements of Astrogeodetic Deflection of the Vertical by Latvian and Swiss Digital Zenith Cameras[J]. *Remote Sensing*, 2023, 15(8): 2166.

[41] WANG Y M, BECKER C, MADER G, et al. The Geoid Slope Validation Survey 2014 and GRAV-D Airborne Gravity Enhanced Geoid Comparison Results in Iowa [J]. *Journal of Geodesy*, 2017, 91(10): 1261-1276.

[42] GUILLAUME S, WOLF A, BURKI B. Deflections of the Vertical Measurement Through Rocky Mountains for the NGS with the CODIAC ETH Zurich System [R]. Switzerland, Zurich: Swiss National Report on the Geodetic Activities in the Years 2015 to 2019, 2019.

[43] HAUK M, HIRT C, ACKERMANN C. Experiences with the QDaedalus System for Astrogeodetic Determination of Deflections of the Vertical [J]. *Survey Review*, 2017, 49(355): 294-301.

[44] HARDY R A, FANCHER K L, AHLGREN K. et al. Geodetic Astronomy with an Imaging Robotic Total Station [C]//American Geophysical Union 2020 Fall Meeting, Online, 2020.

[45] 詹银虎, 张超, 李飞战, 等. 基于图像全站仪的天文大地垂线偏差测量及其精度分析[J]. 测绘学报, 2023, 52(2): 175-182.
ZHAN Yinhu, ZHANG Chao, LI Feizhan, et al. Astro-Geodetic Vertical Deflection Measurement and Accuracy Analysis Based on Image Total Station [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2023, 52(2): 175-182.

[46] 王爱生. 利用GPS和水准测量解算垂线偏差[J]. 测绘通报, 2002(2): 17-20.
WANG Aisheng. Using GPS and Leveling to Calculate the Deviation of Vertical Line [J]. *Bulletin of Surveying and Mapping*, 2002(2): 17-20.

[47] 李建忠. 用GPS测定垂线偏差[J]. 测绘工程, 1999, 8(2): 34-37.
LI Jianzhong. Determining Components of Vertical Deflections Using GPS[J]. *Engineering of Surveying and Mapping*, 1999, 8(2): 34-37.

[48] VANDENBERG D J. Combining GPS and Terrestrial Observations to Determine Deflections of The Vertical [D]. Indiana: Purdue University, 1999.

[49] 欧海平, 胡曙光, 潘正华. 应用GPS与精密水准测定垂线偏差[J]. 城市勘测, 2003(3): 46-47.
OU Haiping, HU Shuguang, PAN Zhenghua. Determination of Vertical Deviation by GPS and Precise Leveling[J]. *Urban Geotechnical Investigation & Surveying*, 2003(3): 46-47.

[50] 许曦, 刘庆元, 朱建军. 天文GPS水准方法的研究[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2004, 35(4): 681-685.
XU Xi, LIU Qingyuan, ZHU Jianjun. Study on GPS Astronomical Leveling[J]. *Journal of Central*

*South University of Technology* (*Natural Science*), 2004, 35(4): 681-685.

[51] 徐益群, 陈日高, 暴景阳, 等. 用GPS水准法测定单点垂线偏差[J]. 海洋测绘, 2004, 24(6): 9-12.
XU Yiqun, CHEN Rigao, BAO Jingyang, et al. The Determination of Vertical Deflections Based on GPS Leveling Observations at Discrete Points[J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2004, 24(6): 9-12.

[52] ALBAYRAK M, MARTI U, WILLI D, et al. Precise Geoid Determination in the Eastern Swiss Alps Using Geodetic Astronomy and GNSS/Leveling Methods[J]. *Sensors*, 2024, 24(21): 7072.

[53] 黄谟涛, 翟国君, 管铮, 等. 海洋重力场测定及其应用[M]. 北京: 测绘出版社, 2005.
HUANG Motao, ZHAI Guojun, GUAN Zheng, et al. Determination and Application of Marine Gravity Field[M]. Beijing: Sino Maps Press, 2005.

[54] SCHWARZ K P, SIDERIS M G, FORSBERG R. The Use of FFT Techniques in Physical Geodesy[J]. *Geophysical Journal International*, 1990, 100(3): 485-514.

[55] 宁津生, 晁定波, 李建成. Vening-Meinesz公式的球面卷积形式[J]. 测绘学报, 1994, 23(3): 161-166.
NING Jinsheng, CHAO Dingbo, LI Jiancheng. The Spherical Convolution Form of Vening-Meinesz Formula[J]. *Acta Geodaetica et Cartographic Sinica*, 1994, 23(3): 161-166.

[56] LIU Q W, LI Y C, SIDERIS M G. Evaluation of Deflections of the Vertical on the Sphere and the Plane: A Comparison of FFT Techniques[J]. *Journal of Geodesy*, 1997, 71(8): 461-468.

[57] HUANG M T, ZHAI G J, GUAN Z, et al. On the Evaluation of Deflections of the Vertical Using FFT Technique [J]. *Geo-spatial Information Science*, 2001, 4(1): 5-13.

[58] 齐显峰, 周巍, 崔吉春. EGM2008重力场模型计算中国地区垂线偏差分析[J]. 测绘技术装备, 2011, 13(1): 6-8.
QI Xianfeng, ZHOU Wei, CUI Jichun. Analysis of Vertical Deviation of EGM2008 Gravity Field Model in China Area [J]. *Geomatics Technology and Equipment*, 2011, 13(1): 6-8.

[59] 张永毅, 张兴福. 垂线偏差的确定方法及精度分析[J]. 大地测量与地球动力学, 2016, 36(5): 395-399.
ZHANG Yongyi, ZHANG Xingfu. Determination and Accuracy Analysis of Vertical Deflection [J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2016, 36(5): 395-399.

[60] WAN X Y, ANNAN R F, JIN S G, et al. Vertical Deflections and Gravity Disturbances Derived from HY-2A Data[J]. *Remote Sensing*, 2020, 12(14): 2287.

[61] JI H, GUO J Y, ZHU C C, et al. On Deflections of Vertical Determined from HY-2A/GM Altimetry Data in the Bay of Bengal[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2021, 14: 12048-12060.

[62] HOLMES S A, FEATHERSTONE W E. A Unified Approach to the Clenshaw Summation and the Recursive Computation of very High Degree and Order Normalised Associated Legendre Functions[J]. *Journal of Geodesy*, 2002, 76(5): 279-299.

[63] FUKUSHIMA T. Numerical Computation of Spherical Harmonics of Arbitrary Degree and Order by Extending Exponent of Floating Point Numbers [J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(4): 271-285.

[64] JEKELI C, LEE J K, KWON J H. On the Computation and Approximation of Ultra-High-Degree Spherical Harmonic Series[J]. *Journal of Geodesy*, 2007, 81(9): 603-615.

[65] 苏勇, 范东明, 游为. 缔合Legendre函数二阶导数的快速稳定递推算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2012, 37(12): 1409-1412.
SU Yong, FAN Dongming, YOU Wei. Fast and Stably Recursive Algorithm for Computing Second Derivative of Associated Legendre Functions [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2012, 37(12): 1409-1412.

[66] 刘缵武, 刘世晗, 张敬伟. 5 400阶次勒让德函数的递推计算方法[J]. 海洋测绘, 2014, 34(4): 1-4.
LIU Zuanwu, LIU Shihan, ZHANG Jingwei. Recursive Computation Methods of 5 400 Degree and Order Legendre Functions[J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2014, 34(4): 1-4.

[67] 张飞. 利用球谐函数计算重力场元[D]. 抚州: 东华理工大学, 2017.
ZHANG Fei. Calculation of Gravity Field Parameters Using Spherical Harmonics[D]. Fuzhou: East China Institute of Technology, 2017.

[68] SVEHLA D. A Geometrical Approach for the Computation and Rotation of Spherical Harmonics and Legendre Functions Up to Ultra-High Degree and Order[M]. Cham: Springer International Publishing, 2018.

[69] XING Z B, LI S S, TIAN M, et al. Numerical Experiments on Column-Wise Recurrence Formula to Compute Fully Normalized Associated Legendre Functions of Ultra-High Degree and Order[J]. *Journal of Geodesy*, 2019, 94(1): 2.

[70] SANDWELL D T. Antarctic Marine Gravity Field from High-Density Satellite Altimetry[J]. *Geophysical Journal International*, 1992, 109(2): 437-448.

[71] OLGIATI A, BALMINO G, SARRAILH M, et al. Gravity Anomalies from Satellite Altimetry: Comparison Between Computation via Geoid Heights and *via* Deflections of the Vertical[J]. *Bulletin Géodésique*, 1995, 69(4): 252-260.

[72] HWANG C, KAO E C, PARSONS B. Global Derivation of Marine Gravity Anomalies from Seasat, GEOSAT, ERS-1 and TOPEX/Poseidon Altimeter Data[J]. *Geophysical Journal International*, 1998, 134(2): 449-459.

[73] 李建成, 宁津生, 陈俊勇, 等. 中国海域大地水准面和重力异常的确定[J]. 测绘学报, 2003, 32(2): 114-119.
LI Jiancheng, NING Jinsheng, CHEN Junyong, et al. Geoid Determination in China Sea Areas[J]. *Acta Geodaetica et Cartographic Sinica*, 2003, 32(2): 114-119.

[74] 王虎彪, 王勇, 陆洋. 联合多种测高数据确定中国边缘海及全球海域的垂线偏差[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2007, 32(9): 770-773.
WANG Hubiao, WANG Yong, LU Yang. High Precision Vertical Deflection over China Marginal Sea and Global Sea Derived from Multi-Satellite Altimeter[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2007, 32(9): 770-773.

[75] 邓凯亮, 暴景阳, 章传银, 等. 联合多代卫星测高数据建立中国近海垂线偏差模型[J]. 海洋测绘, 2008, 28(3): 15-17.
DENG Kailiang, BAO Jingyang, ZHANG Chuanyin, et al. Determination of Vertical Deflection over China Sea by Combination of Multi-satellite Altimeter Data[J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2008, 28(3): 15-17.

[76] 万剑华, 王莉娟, 范陈清, 等. 联合多卫星测高数据确定中国近海及其邻域垂线偏差[J]. 海洋学研究, 2012, 30(3): 86-91.
WAN Jianhua, WANG Lijuan, FAN Chenqing, et al. Determination of Vertical Deflection over China Seas and Their Vicinity from the Multi-satellite Altimetric Data[J]. *Journal of Marine Sciences*, 2012, 30(3): 86-91.

[77] 张胜军, 李建成, 褚永海, 等. 基于Cryosat和Jason-1 GM数据的垂线偏差计算与分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2015, 40(8): 1012-1017.
ZHANG Shengjun, LI Jiancheng, CHU Yonghai, et al. Calculation and Analysis of the Deflection of Vertical Derived from Cryosat and Jason-1 GM Data[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2015, 40(8): 1012-1017.

[78] PENG H H, LIU X, LI Z, et al. Optimized Estimation of Marine Deflection of the Vertical from Multibeam Laser Altimeter Data of ICESat-2[J]. *Geophysical Journal International*, 2024, 239(1): 455-466.

[79] 于道成, 黄金维, 祝会忠, 等. 利用SWOT宽刈幅测高数据提升海洋重力场精度:与传统测高卫星的比较分析[J/OL]. 武汉大学学报(信息科学版), 2024, https://ch.whu.edu.cn/article/doi/10.13203/j.whugis20240120.
YU Daocheng, HUANG Jinwei, ZHU Huizhong, et al. Enhancing Marine Gravity Field Precision Using SWOT Wide-Swath Altimetry Data: A Comparative Analysis with Traditional Altimetry Satellites[J/OL]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2024, https://ch.whu.edu.cn/article/doi/10.13203/j.whugis20240120.

[80] JIN X, LIU X, GUO J Y, et al. A Novel All-Weather Method to Determine Deflection of the Vertical by Combining 3D Laser Tracking Free-Fall and Multi-GNSS Baselines[J]. *Remote Sensing*, 2022, 14(17): 4156.

[81] 郭金运, 吴渴知, 金鑫, 等. 高精度三维跟踪抛物运动的重力垂直梯度测量方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2025, 50(3): 462-468.
GUO Jinyun, WU Kezhi, JIN Xin, et al. A Method to Determine Vertical Gravity Gradient by High-Precision 3D Tracking Parabolic Motion[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2025, 50(3): 462-468.